EXERCICE 4 **7 points**

Principaux domaines abordés : suites, fonctions, primitives

1.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc puisque $n+1 \geqslant 1 > 0$ et que $\dfrac{1}{n1} > 0$, on en déduit que pour tout naturel :

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

La suite (u_n) encadrée par deux suites ayant pour limite 0 a pour limite 0.

✧✧✧

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = \mathrm{e}^{-2v_n} + 2.$$

On a $w_0 = \mathrm{e}^{-2v_0} + 2 = \mathrm{e}^{-2\ln(a)} + 2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln(a)}} + 2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(a^2)}} + 2 = \dfrac{1}{a^2} + 2.$

2. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :

On a successivement :

$v_n \leqslant v_{n+1} \Rightarrow 2v_n \leqslant 2v_{n+1} \Rightarrow -2v_{n+1} \leqslant -2v_n \Rightarrow \mathrm{e}^{-2v_{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^{-2v_n}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $\mathrm{e}^{-2v_{n+1}} + 2 \leqslant \mathrm{e}^{-2v_n} + 2$, soit $w_{n+1} \leqslant w_n$: la suite (w_n) est décroissante.

D'autre part on sait que quel que soit le réelα, $\mathrm{e}^{\alpha} > 0$ donc la suite est minorée par 2.

3.

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Soit la suite (b_n) définie pour tout naturel n par $b_n = a_n + \alpha$.

Alors $b_{n+1} = a_{n+1} + \alpha = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}(b_n - \alpha) + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}b_n - \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{8+2\alpha}{3}$.

Prenons $\alpha = -4$, alors $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n$: cette égalité montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 + \alpha = 2 - 4 = -2$.

On sait qu'alors que, quel que soit le naturel n, $\quad b_n = b_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Finalement $b_n = a_n - 4 \iff a_n = 4 + b_n = 4 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On a quel que soit le naturel n, $\quad b_{n+1} - b_n = \ln\left(\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$.

Or quel que soit le réel b_n, $\quad b_n^2 \geqslant 0$, donc $(b_n)^2 + 3 \geqslant 3 > 2$, donc $\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3} < 1$ et enfin $\ln\left(\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0$.

Conclusion : $b_{n+1} - b_n < 0$ montre que la suite (b_n) est décroissante.

5.

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

- Au voisinage de zéro : $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$: géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_g$.
- Au voisinage de plus l'infini : on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc pas d'asymptote.

6.

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2+1}.$$

En posant $u(x) = x^2+1$, on a $u'(x) = 2x$ et l'on peut écrire $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times \mathrm{e}^{x^2+1} = \frac{1}{2} u'\mathrm{e}^u$: on reconnait la dérivée de $\frac{1}{2}\mathrm{e}^u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$.

Donc $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$.